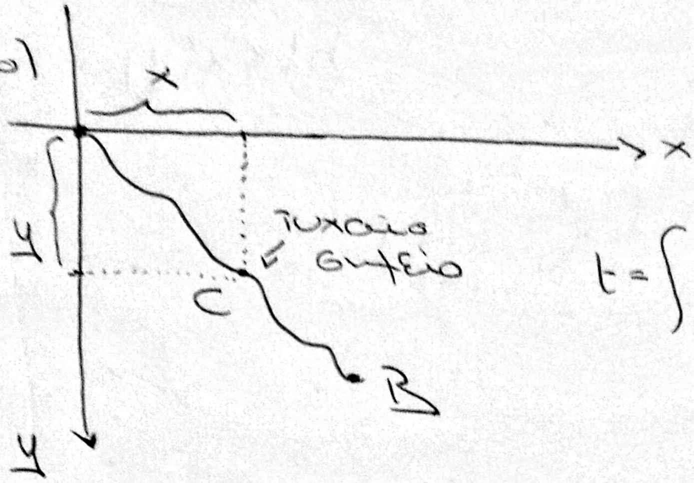
(συνέχεια παραδείγματος)

Πρόβλημα βραχυστόχρονου:



$$t = \int_A^B \frac{ds}{\underset{\text{ταχύτητα}}{v}}$$

• Γνωρίζω από τις εξισώσεις Lagrange ότι αν

$$t = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)\, dx$$

, τότε το t ελαχιστοποιείται αν

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

• Στο τυχαίο σημείο C, το υλικό σημείο έχει ενέργεια

$E = T + V =$ (κινητική) + (δυναμική)

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m v^2 - mgy$

Στο σημείο A: $E = T + V = 0$

Από τη διατήρηση της ενέργειας: $\frac{1}{2} m \underset{|\dot{x}|^2}{v^2} - mgy = 0$

$\Rightarrow v^2 = 2gy \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$

$$t=\int_A^B \frac{ds}{v}=\int_A^B \frac{\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}{\sqrt{2gy}}=\int \underbrace{\frac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{2gy}}}_{f_1(x,x',y)}\,dy \quad \left(x'=\frac{dx}{dy}\right)$$

<u>Ανάλογα:</u>

$$t=\int_A^B \underbrace{\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{2gy}}}_{f_2(y,y',x)}\,dx \quad \left(y'=\frac{dy}{dx}\right)$$

(Τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίδια και είναι δική μας επιλογή ποιό από τα δύο θα λύσουμε)

- Επιλέγουμε την $f_1=\sqrt{\dfrac{(x')^2+1}{2gy}}$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το y.

Τότε η εξίσωση Euler είναι:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}-\frac{d}{dy}\frac{\partial f_1}{\partial x'}=0$$

- Επιλέγουμε την $f_2=\sqrt{\dfrac{(y')^2+1}{2gy}}$ με ανεξάρτητη μεταβλητή το x.

Τότε η εξίσωση Euler είναι:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'}=0$$

Τότε:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{2g}\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{2g}}\frac{\partial}{\partial y}y^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{2g}\,y^{3/2}}$$

- $$\frac{\partial f_2}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{\sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{(y')^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{(y')^2+1}} = \frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{(y')^2+1}} = \frac{y'}{\sqrt{2gy((y')^2+1)}}$$

Αντικαθιστώ:

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f_2}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{(y')^2+1}}{y^{3/2}} - \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{2gy((y')^2+1)}} = 0}$$

→ Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει την κίνηση (1)

(Προσοχή: ΔΕΝ κάνω σύνθεση συναρτήσεων)

Επιλέγω: $f_1 = \dfrac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{2gy}}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{d}{dy}\frac{\partial f_1}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{2gy}} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dy}\frac{\partial f_1}{\partial x'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x'} = c \text{ σταθερά}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial x'}\frac{\sqrt{(x')^2+1}}{\sqrt{2gy}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{x'}{\sqrt{(x')^2+1}} = c} \quad (2)$$

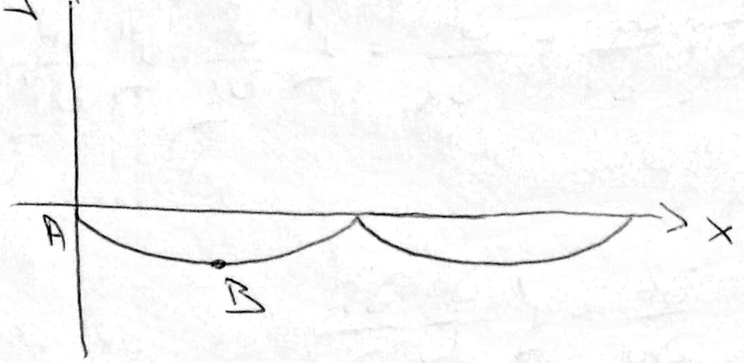
Άσκηση

1) Από την εξίσωση (2), υψώνω στο τετράγωνο και αριστερά έχω $(x')^2$ δεξιά όλα τα y

2) Θέτω $y = a(1-\cos\theta)$ και βρίσκω $x = a(\theta - \sin\theta)$

3) Απλοποιώ την εξίσωση (1) και κάνω την ίδια αντικατάσταση.

Η παραμετρική καμπύλη που προέκυψε είναι η κυκλοειδής:



Η αντικατάσταση $y = a(1-\cos\theta)$ θα έχει ολοκληρώματα της μορφής: $x^2 \pm a^2$

έχει τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Εδώ αν x^2+x+1 συμπληρώνω το τετράγωνο $(x+a)^2-b$ και θέτω $x+a =$ τριγωνομ.

<u>Δηλαδή:</u>

$$y-a = -a\cos\theta \Longrightarrow \boxed{a-y = a\cos\theta}$$

$$t = \int_A^B \frac{ds}{v} \quad = f\,dx \text{ ή } f\,dy$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2} = \begin{cases} \sqrt{(y')^2+1}\,dx & \left(y' = \frac{dy}{dx}\right) \\ \sqrt{(x')^2+1}\,dy & \left(x' = \frac{dx}{dy}\right) \end{cases}$$

• Η δεύτερη μορφή της εξίσωσης Euler

Γνωρίζουμε ότι $f = f(y, y', x)$, δηλαδή:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = y'\frac{\partial f}{\partial y} + y''\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

Θεωρώ την ποσότητα:

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y''\frac{\partial f}{\partial y'} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Αφαιρώ τις εξισώσεις:

$$\frac{df}{dx} - \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = y'\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} - y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

$$= y'\underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right]}_{\text{Εξίσωση Euler}\ \to\ 0} + \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{df}{dx} + \frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0}$$

Η μορφή χρησιμοποιείται όταν η συνάρτηση f εξαρτάται άμεσα από την ανεξάρτητη μεταβλητή, και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = 0}$

Γενίκευση σε περισσότερες μεταβλητές

Με την ίδια λογική που αποδείξατε την εξίσωση Euler για τη συνάρτηση $f=f(y,y',x)$, μπορούμε να γενικεύσουμε σε περισσότερες μεταβλητές, δηλαδή:
$f=f(y_1,y_1',y_2,y_2',y_3,y_3',\dots,y_n,y_n',x)$ ή για συντομία:
$f=f(y_i,y_i',x)$, $i=1,\dots,n$.

Τότε βρίσκουμε ένα σύστημα εξισώσεων μία εξίσωση για κάθε y_i, $i=1,\dots,n$

Δηλαδή: $$\frac{\partial f}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'}=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Παράδειγμα

Έστω $f=f(y_1,y_1',y_2,y_2',y_3,y_3',x)$

Τότε οι εξισώσεις Euler είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_1'}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y_2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_2'}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_3}-\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_3'}=0$$